Concircular diffeomorphisms of pseudo-Riemannian manifolds

Doctoral Thesis

Author(s):
Catalano, Domenico Antonino

Publication date:
1999

Permanent link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-003820537

Diss. ETH No. 13064

Concircular Diffeomorphisms of pseudo-Riemannian Manifolds

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
Doctor of Mathematical Sciences

presented by
DOMENICO ANTONINO CATALANO
Dipl. Math. ETH

born on 16 November 1965
citizen of Ambri, Ticino

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. U. Lang, examiner
Prof. Dr. K. Voss, co-examiner and supervisor

1999

Kurzfassung

Gegenstand der Dissertation ist die Untersuchung lokaler Eigenschaften pseudo-Riemannscher Mannigfaltigkeiten, die konzirkulare Vektorfelder gestatten, d.h. Lösungen V der Differentialgleichung: $D_X V = \sigma X \quad$ für alle Vektorfelder X. Insbesondere wird der Fall der Existenz mehrerer linear unabhängiger Lösungen behandelt.

Solche Vektorfelder kommen vor bei der Betrachtung von Diffeomorphismen, die Kreise auf Kreise abbilden (konzirkulare Diffeomorphismen). Wir geben also zuerst eine für den pseudo-Riemannschen Fall geeignete Definition von Kreisen und zeigen, dass jeder konzirkulare Diffeomorphismus konform ist. Es stellt sich dann die Frage welche konformen Diffeomorphismen konzirkular sind. In Paragraph 2.3 stellen wir fest, dass ein konformer Diffeomorphismus mit Konformitätsfaktor λ konzirkular ist genau dann, wenn $V = \nabla \frac{1}{\lambda}$ ein konzirkulares Vektorfeld ist. Einige Eigenschaften von konzirkularen Vektorfeldern kann man direkt aus der Differentialgleichung ablesen. Zum Beispiel gilt:

- Die Integralkurven eines konzirkularen Vektorfeldes sind Geodätische.
- Jedes konzirkulare Vektorfeld ist lokal ein Gradientenfeld.
- Die Flussabbildungen eines konzirkularen Vektorfeldes sind konform. Darum werden in der Literatur konzirkulare Vektorfelder auch konforme Vektorfelder genannt.

Andere Eigenschaften folgen aus der Integrabilitätsbedingung der Differentialgleichung. Zum Beispiel gilt:

- Die Nullstellen eines konzirkularen Vektorfeldes $V \not\equiv 0$ sind isoliert. Ferner folgt dann, dass jede vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, die ein konzirkulares Vektorfeld mit Nullstellen gestattet, konform flach ist.
- Auf einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit konstanter Schnittkrümmung gibt es lokal $n := \dim M$ lineare unabhängige konzirkulare Vektorfelder. In Paragragh 4.2 werden wir, aufgrund eines geeigneten Modells für pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten konstanter Schnittkrümmung, die allgemeine Lösung der Differentialgleichung angeben.

Wenn eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) mehrere lineare unabhängige konzirkulare Vektorfelder $V^{(1)}, \ldots, V^{(s)}$ gestattet, unterscheiden wir folgende Fälle:

a) Die Metrik g artet auf der Distribution, aufgespannt durch $V^{(1)}, \ldots, V^{(s)}$, nicht aus. In diesem Fall kann man zeigen, dass (M, g) lokal isometrisch zu eimem verzerrten Produkt $M_1 \times_h M_2$ ist, wobei $\dim M_1 = s$ und, im Fall $s > 1$, (M_1, g_1) und der Verzerrungsfaktor h weiteren Bedingungen genügen (Theorem 3.2 und Theorem 4.5).

b) Die Metrik g artet auf der Distribution, aufgespannt durch $V^{(1)}, \dots, V^{(s)}$, aus. Hier betrachten wir Distributionen aufgespannt durch Teilmengen von $\{V^{(1)}, \dots, V^{(s)}\}$, auf denen die Metrik nicht ausartet. Ist $V^{(i_1)}, \dots, V^{(i_r)}$ eine solche Teilmenge mit maximalem r, dann ergeben sich, unter der Annahme, dass r konstant ist, die folgenden zwei Unterfälle:

   b_1) $r = 0$. Dann gibt es lokale Koordinaten, so dass g die in Theorem 4.16 gegebene Form hat.

   b_2) $r > 0$. Hier können wir die Ergebnisse von a) mit denen von b_1) kombinieren. Genauer: (M, g) ist dann lokal isometrisch zu einem verzerrten Produkt $M_1 \times_h M_2$, wobei $\dim M_1 = r$, h eine spezielle Funktion auf M_1 ist, und auf M_2 gibt es lokale Koordinaten wie im Fall b_1).

Andererseits, wenn g die in a), b_1) oder b_2) gefundene Normalform hat, dann existieren auf (M, g) linear unabhängige konzirkulare Vektorfelder $V^{(1)}, \dots, V^{(s)}$.

Abstract

The subject of the dissertation is the study of local properties of pseudo-Riemannian manifolds admitting concircular vector fields i.e. solutions V of the differential equation: $D_X V = \sigma X$ for all vector fields X.
Special attention is given to the case of the existence of a set of more than one linearly independent solutions.

Such vector fields appear in the study of diffeomorphisms that carry circles into circles (concircular diffeomorphisms). Thus, we first give an adequate definition of circles on a pseudo-Riemannian manifold and prove that every concircular diffeomorphism is conformal. Then the question arises, which conformal diffeomorphisms are concircular. In section 2.3 we ascertain that a conformal diffeomorphism with conformal factor λ is concircular if and only if $V = \nabla\frac{1}{\lambda}$ is a concircular vector field. Some properties of concircular vector fields follow directly from the differential equation. For instance we have:

- The integral curves of a concircular vector field are geodesics.
- Every concircular vector field is locally a gradient field.
- The flow of a concircular vector field consists of conformal diffeomorphisms. Thus, in the literature, concircular vector fields are also called conformal vector fields.

Other properties follow from the integrability condition of the differential equation. For instance we have:

- The zeros of a concircular vector field $V \not\equiv 0$ are isolated. Furthermore, every complete Riemannian manifold, that carries a concircular vector field with zeros, is conformally flat.
- On a pseudo-Riemannian manifold of constant sectional curvature locally there are $n := \dim M$ linearly independent concircular vector fields. In section 4.2 we will give, using a suitable model for pseudo-Riemannian manifolds of constant sectional curvature, the general solution of the differential equation.

If a pseudo-Riemannian manifold (M, g) admits linearly independent concircular vector fields $V^{(1)}, \dots, V^{(s)}$, then we have the following cases:

a) The metric g is nondegenerate on the distribution spanned by $V^{(1)}, \dots, V^{(s)}$. In this case, one can prove that (M, g) is locally isometric to a warped product $M_1 \times_h M_2$, where $\dim M_1 = s$ and, in the case $s > 1$, (M_1, g_1) and the warp factor h satisfy further conditions (theorem 3.2 and theorem 4.5).

b) The metric g is degenerate on the distribution spanned by $V^{(1)}, \dots, V^{(s)}$. Here we consider distributions spanned by subsets of $\{V^{(1)}, \dots, V^{(s)}\}$ on which the metric is nondegenerate. If $V^{(i_1)}, \dots, V^{(i_r)}$ is such a subset with maximal r then, assuming r constant, we distinguish the following cases:

b_1) $r = 0$. Then there are local coordinates such that g takes the form given in theorem 4.16.

b_2) $r > 0$. Here we can combine the results of a) and b_1). More precisely: (M, g) is locally isometric to a warped product $M_1 \times_h M_2$, where $\dim M_1 = r$, h is a special function on M_1, and on M_2 there are local coordinates as in case b_1).

On the other hand, if (M, g) has the properties found in a), b_1) or b_2), then there are on (M, g) linearly independent concircular vector fields $V^{(1)}, \dots, V^{(s)}$.